VETORES DO ESPAÇO

MARCELO DIAS PASSOS

Resumo. Estas notas são revisões de notas de aulas digitadas durante os cursos de MATB34 (Geometria Analítica e Álgebra Vetorial) em 2021 (semestres 2021.1 e 2021.2).

Para dar coordenadas aos vetores paralelos a determinado plano, precisamos tomar uma dupla de vetores paralelos a ele, que não fossem paralelos entre si. Para os demais vetores, ou seja, para todos os vetores do espaço precisamos de mais condições.

Definição 1. *Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$, vetores distintos 2 a 2. Diremos que $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ **são coplanares** se, e somente se, existe plano π tal que $\overrightarrow{v_i} // \pi$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, ou seja, existir um plano ao qual todos os vetores citados são paralelos.*

Exercício 1. *Nas condições da definição mostre que, se $n \leq 2$, então $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ são coplanares.*

Teorema 1. *Sejam $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ **não** coplanares.*
(1) Para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ se, e somente se, $\alpha = 0 = \beta = \gamma$.
(2) Para $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \nu\overrightarrow{w}$ se, e somente se, $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu$ e $\gamma = \nu$.
(3) Para $\overrightarrow{t}$, vetor, existem únicos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{t} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} \ .$$

Demonstração. (1) Suponhamos que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, e que, sem perda de generalidade, que $\gamma \neq 0$. Sendo assim,

$$\overrightarrow{w} = -\frac{\alpha}{\gamma}\overrightarrow{u} - \frac{\beta}{\gamma}\overrightarrow{v} \ .$$

Por resultado anterior, $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ seriam coplanares, o que é um absurdo.
(2) Suponhamos que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{v} + \nu\overrightarrow{w}$, para $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Logo

$$\overrightarrow{0} = (\alpha - \lambda)\overrightarrow{u} + (\beta - \mu)\overrightarrow{v} + (\gamma - \nu)\overrightarrow{w} \ .$$

Pelo item anterior, $\alpha - \lambda = 0 = \beta - \mu = \gamma - \nu$, ou seja, $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu$ e $\gamma = \nu$.
(3) Tomemos $\overrightarrow{w}$, um vetor. Fixemos O um ponto e sejam $P = O + \overrightarrow{t}$, $A = O + \overrightarrow{u}$, $B = O + \overrightarrow{v}$, $C = O + \overrightarrow{w}$ e π o plano determinado pelos pontos O, A e B. Pelo ponto P tracemos a reta r, que é paralela à reta $\overleftrightarrow{OC}$. Os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são paralelos ao plano π e, sendo assim, r não é paralela a π. Seja Q a interseção de r e π. Dado que $\overrightarrow{OQ} // \pi$, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{OQ} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$. Como $\overrightarrow{QP} // \overrightarrow{w}$, existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{QP} = \gamma\overrightarrow{w}$. Logo

$$\overrightarrow{t} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} \ .$$

A unicidade dos coeficientes é dada pelo item anterior. □

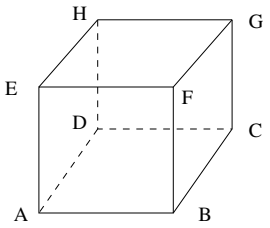
Definição 2. *Seja $\mathbb{V}^3$ o conjunto de todos os vetores. Uma tripla $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ é chamada de **base para** $\mathbb{V}^3$ se, e somente se, $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ são distintos 2 a 2 e não coplanares.*

*Dado $\overrightarrow{u} \in \mathbb{V}^3$, a tripla $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$ é chamada de **tripla de coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}$ com relação à base** $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Se $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, escreveremos $\overrightarrow{u} = (x, y, z)_{\mathcal{B}}$ para denotar a situação. O escalar x será chamado de **coordenada de $\overrightarrow{u}$ na direção** $\overrightarrow{e_1}$ enquanto y **é a coordenada de $\overrightarrow{u}$ na direção** $\overrightarrow{e_2}$ e z **é a coordenada de $\overrightarrow{u}$ na direção** $\overrightarrow{e_3}$.*

Date: 2024.

Exercício 2. *Para o cubo da figura ao lado, considerando como base* $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$*, determine as coordenadas dos vetores a seguir:*

(1) $\vec{0}$	*(5)* $\overrightarrow{AE}$	*(9)* $\overrightarrow{GH}$	*(13)* $\overrightarrow{GA}$
(2) $\overrightarrow{AB}$	*(6)* $\overrightarrow{CD}$	*(10)* $\overrightarrow{AH}$	*(14)* $\overrightarrow{EC}$
(3) $\overrightarrow{AC}$	*(7)* $\overrightarrow{AF}$	*(11)* $\overrightarrow{BH}$	*(15)* $\overrightarrow{HC}$
(4) $\overrightarrow{AD}$	*(8)* $\overrightarrow{DH}$	*(12)* $\overrightarrow{GE}$	



Teorema 2. *Seja* $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ *uma base para* $\mathbb{V}^3$*. Se* $\vec{u} = (a, b, c)_{\mathcal{B}}$*,* $\vec{v} = (x, y, z)_{\mathcal{B}}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*, então*

$$\vec{u} + \vec{v} = (a + x, b + y, c + z)_{\mathcal{B}} \qquad e \qquad \lambda\vec{u} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)_{\mathcal{B}}.$$

Demonstração. Se $\vec{u} = (a, b, c)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{v} = (x, y, z)_{\mathcal{B}}$, então $\vec{u} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2} + c\vec{e_3}$ e $\vec{v} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$. Portanto:

(1) $\vec{u} + \vec{v} = (a + x)\vec{e_1} + (b + y)\vec{e_2} + (c + z)\vec{e_3}$, enquanto
(2) $\lambda\vec{u} = \lambda(a\vec{e_1} + b\vec{e_2} + c\vec{e_3}) = (\lambda a)\vec{e_1} + (\lambda b)\vec{e_2} + (\lambda c)\vec{e_3}$.

□

Exercício 3. *Sendo* $\vec{u} = (1, -2, 4)$*,* $\vec{v} = (0, 2, 5)$ *e* $\vec{w} = (1, 1, -2)$*, ache as coordenadas de:*

(1) $\vec{u} + \vec{v}$ *(2)* $-\vec{u} + 2\vec{v}$ *(3)* $2\vec{v} + 3\vec{w}$ *(4)* $\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$ *(5)* $-\frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{4}\vec{u}$

Exercício 4. *Verifique se* $\vec{u}$ *pode ser escrito em função de* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$*, para* $\vec{u}$*,* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *do exercício anterior.*

Exercício 5. $(1, -1, 3)$ *pode ser escrito em função de* $(-1, 1, 0)$ *e* $(2, 3, \frac{1}{3})$*?*

Exercício 6. *Sejam* $OABC$ *um tetraedro, e* G *o baricentro (encontro das três medianas de uma triângulo) da face* $\triangle ABC$*. Explique por que* $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ *é uma base e ache as coordenadas de* $\overrightarrow{OG}$ *nesta base.*

Proposição 3. *Nas mesmas condições do teorema anterior,*

$$\vec{u} /\!/ \vec{v} \quad \textit{se, e somente se,} \quad \begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} b & y \\ c & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x \\ c & z \end{vmatrix} .$$

Demonstração. Suponhamos que $\vec{u} /\!/ \vec{v}$ e, sem perda de generalidade, que $\vec{v} \neq \vec{0}$. Sendo assim, $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Pelo teorema anterior, $a = \alpha x$, $b = \alpha y$ e $c = \alpha z$. Logo

$$\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = ay - bx = (\alpha x)y - (\alpha y)x = 0 .$$

Analogamente concluímos que os outros dois determinantes serão nulos.

Agora suponhamos que $ay = bx$, $bz = cy$ e $az = cx$. Se $\vec{v} = \vec{0}$, então $\vec{u} /\!/ \vec{v}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x \neq 0$ e seja $\lambda = \frac{a}{x}$. Daí $a = \lambda x$, $b = \lambda y$, $c = \lambda z$ e, consequentemente, $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. □

Exercício 7. *Ache* m *para que* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *sejam paralelos:*

(1) $\vec{u} = (m, 1, m)$ *e* $\vec{v} = (1, m, 1)$ *(2)* $\vec{u} = (1 - m^2, 1 - m, 0)$ *e* $\vec{v} = (m, m, m)$

Observação 1. *Tomemos* $\vec{u} = (1, 0, 2)$ *e* $\vec{v} = (-1, 0, 2)$*. Observamos que* $\vec{u}$ *não é paralelo a* $\vec{v}$ *e que*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad \textit{mas} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 .$$

Logo, o fato de dois dos três determinantes se anularem não é condição suficiente para que os vetores sejam paralelos.

Teorema 4. *Seja* $\mathcal{B}$ *uma base para* $\mathbb{V}^3$*. Para* $\vec{u} = (a, b, c)_{\mathcal{B}}$*,* $\vec{v} = (x, y, z)_{\mathcal{B}}$ *e* $\vec{w} = (p, q, r)_{\mathcal{B}}$*,*

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \textit{ são coplanares se, e somente se,} \begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = 0 .$$

Demonstração. Seja $M = \begin{pmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{pmatrix}$

Suponhamos que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são coplanares.

Caso $\vec{u} // \vec{v}$, pela proposição anterior, deduzimos que

$$\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} b & y \\ c & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x \\ c & z \end{vmatrix} .$$

Logo, os cofatores da terceira coluna de M são nulos. Desenvolvendo o determinante por esta coluna, obtemos que o determinante de M é nulo.

Se $\vec{u}$ não é paralelo a $\vec{v}$, então $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sendo assim, a terceira coluna de M é α vezes a primeira coluna de M mais β vezes a segunda coluna. Portanto M tem determinante zero.

Agora suponhamos que M tem determinante nulo. Se $\vec{v} // \vec{w}$, então $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são coplanares. Suponhamos que $\vec{v} \not// \vec{w}$ e, sem perda de generalidade, que $\begin{vmatrix} x & p \\ y & q \end{vmatrix} \neq 0$. Se $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, então $\mathcal{C} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ é base para os vetores paralelos a um plano e $\big((x,y)_\mathcal{C}, (p,q)_\mathcal{C}\big)$ é base para esses mesmos vetores. Sendo assim, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $(a,b)_\mathcal{C} = \alpha(x,y)_\mathcal{C} + \beta(p,q)_\mathcal{C}$. Logo

$$0 = \begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - \alpha x - \beta p & x & p \\ b - \alpha y - \beta q & y & q \\ c - \alpha z - \beta r & z & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & p \\ 0 & y & q \\ c - \alpha z - \beta r & z & r \end{vmatrix} = (c - \alpha z - \beta r) \begin{vmatrix} x & p \\ y & q \end{vmatrix} .$$

Dado que $\begin{vmatrix} x & p \\ y & q \end{vmatrix} \neq 0$, $c - \alpha z - \beta r = 0$ ou, equivalentemente, $c = \alpha z + \beta r$. Logo $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são coplanares. □

Exercício 8. *Ache m, de modo que $(1,2,2)$, $(m-1,1,m-2)$ e $(m+1,m-1,2)$ sejam coplanares.*

Exercício 9. *Ache m, para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam coplanares:*

(1) $\vec{u} = (m,1,m+1)$, $\vec{v} = (1,2,m)$ e $\vec{w} = (1,1,1)$

(2) $\vec{u} = (m,1,m+1)$, $\vec{v} = (0,1,m)$ e $\vec{w} = (0,m,2m)$

Agora veremos teorema que determina relação entre as coordenadas de um mesmo vetor com relação a duas bases de $\mathbb{V}^3$.

Definição 3. *Sejam $\mathcal{B} = \big(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\big)$ e $\mathcal{C} = \big(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\big)$ bases para $\mathbb{V}^2$. Se $\vec{f_1} = (a,b,c)_\mathcal{B}$, $\vec{f_2} = (x,y,z)_\mathcal{B}$ e $\vec{f_3} = (p,q,r)_\mathcal{B}$, a matriz*

$$\begin{pmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{pmatrix}$$

é chamada de ***matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$.***

Como base é sempre trio de vetores não coplanares, vale o seguinte resultado:

Corolário 1. *Toda matriz de mudança de base é inversível.*

Demonstração. Uma matriz de mudança de base tem como colunas as coordenadas de vetores não coplanares. Pelo teorema 4, essa matriz tem determinante não nulo e portanto será inversível. □

Teorema 5 (Mudança de base)**.** *Nas mesmas condições da definição, se M é a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$, então*

$$M \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} ,$$

para todo $\vec{v} = (\alpha,\beta,\gamma)_\mathcal{B} = (\lambda,\mu,\nu)_\mathcal{C}$.

Demonstração. Fixemos $\vec{v} = (\alpha,\beta,\gamma)_\mathcal{B} = (\lambda,\mu,\nu)_\mathcal{C}$. Logo

$$\vec{v} = \lambda\vec{f_1} + \mu\vec{f_2} + \nu\vec{f_3} = \lambda(a,b,c)_\mathcal{B} + \mu(x,y,z)_\mathcal{B} + \nu(p,q,r)_\mathcal{B} = \big(\lambda a + \mu x + \nu p, \lambda b + \mu y + \nu p, \lambda c + \mu z + \nu r\big)_\mathcal{B} .$$

Pela unicidade das coordenadas com relação à base $\mathcal{B}$, induzimos que $\alpha = \lambda a+\mu x+\nu p$, $\beta = \lambda b+\mu y+\nu p$ e $\gamma = \lambda c + \mu z + \nu r$, ou seja,

$$M \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu x + \nu p \\ \lambda b + \mu y + \nu p \\ \lambda c + \mu z + \nu r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} .$$

□

Exercício 10. *Sejam $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ base e $\vec{f_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{f_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2}$ e $\vec{f_3} = \vec{e_3}$, decida se $F = \left(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\right)$ é base.*

Exercício 11. *Usando E e F do exercício anterior, ache as coordenadas em relação à base F de:*
(1) $(1,1,1)_E$ *(2)* $(1,-1,\frac{1}{2})_E$ *(3)* $(\alpha,\beta,\gamma)_E$ *(4)* $(2,4,-4)_E$

Exercício 12. *Conforme o exercício 10, ache as coordenadas dos vetores abaixo em relação à base E:*
(1) $(0,0,-1)_F$ *(2)* $(-1,2,0)_F$ *(3)* $(\frac{1}{2},0,-\frac{2}{3})_F$

Exercício 13. *Mostre que $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{HC}, \overrightarrow{AE}\right)$ é base. Ache as coordenadas dos mesmos vetores do exercício 2 com relação à base $\mathcal{C}$.*

Exercício 14. *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de $\mathbb{V}^3$. Se M é a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$, mostre que M^{-1} é a matriz de mudança de base de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{B}$.*

1. Ortogonalidade. Produto Escalar

Os conceitos de medida angular entre vetores não nulos e o de ortogonalidade continuam os mesmos que os de antes.

Definição 4. *Diremos que uma base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ é **ortogonal** se, e somente se, $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$, $\vec{e_2} \perp \vec{e_3}$ e $\vec{e_3} \perp \vec{e_1}$. A base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ será dita **ortonormal** se, e somente se, for ortogonal e $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$ forem unitários.*

Corolário 2. *Se $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ é uma base ortogonal, então $\left(\frac{\vec{e_1}}{\|\vec{e_1}\|}, \frac{\vec{e_2}}{\|\vec{e_2}\|}, \frac{\vec{e_3}}{\|\vec{e_3}\|}\right)$ é base ortonormal.* □

Teorema 6. *Seja $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, base ortonormal. Se $\vec{u} = (x,y,z)_{\mathcal{B}}$, então $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.*

Demonstração. Sejam $\vec{w} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ e $\vec{v} = z\vec{e_3}$. Como $\vec{w} \perp \vec{v}$, por resultado anterior,

$$\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{w} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{w}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 .$$

Por sua vez $\|\vec{w}\| = \sqrt{x^2+y^2}$. Dado que $\|\vec{e_3}\| = 1$, induzimos que $\|\vec{v}\| = |z|$. Logo $\|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2+z^2$ e segue a tese do teorema. □

Teorema 7. *Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Se $\vec{u} = (a,b,c)_{\mathcal{B}} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} = (x,y,z)_{\mathcal{B}} \neq \vec{0}$, então*

$$\cos\left(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})\right) = \frac{ax+by+cz}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

Demonstração. Seja $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$.

Se $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, então

$$\frac{ax+by+cz}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{(\lambda x)x + (\lambda y)y + (\lambda z)z}{|\lambda| \cdot \|\vec{v}\|^2} = \frac{\lambda(x^2+y^2+z^2)}{|\lambda| \cdot \|\vec{v}\|^2} = \frac{\lambda}{|\lambda|}.$$

Caso $\lambda > 0$, conclui-se que $\theta = 0$ e $\frac{ax+by+cz}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = 1 = \cos 0$. Se $\lambda < 0$, então $\theta = \pi$ e $\frac{ax+by+cz}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = -1 = \cos\pi$. Portanto o corolário é válido quando $\vec{u} /\!/ \vec{v}$.

Suponhamos que $\vec{u} \not/\!/ \vec{v}$ e sejam A um ponto, $B = A + \vec{u}$ e $C = A + \vec{v}$. Fica determinado o triângulo ΔABC e o lado $\overline{BC}$ é oposto ao ângulo $B\widehat{A}C$. Pela **Lei dos Cossenos**,

$$\left\|\overline{BC}\right\|^2 = \left\|\overline{AC}\right\|^2 + \left\|\overline{AB}\right\|^2 - 2 \cdot \left\|\overline{AC}\right\| \cdot \left\|\overline{AB}\right\| \cdot \cos\theta .$$

Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = (x-a, y-b, z-c)_{\mathcal{B}}$, deduzimos que

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \left(x^2+y^2+z^2\right) + \left(a^2+b^2+c^2\right) - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta .$$

Ou seja,

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = ax + by + cz ,$$

e conclui-se a tese. □

Observação 2. *A partir de agora, salvo disposição em contrário, todos os vetores estão escritos com relação a uma base ortonormal pré-fixada. Sendo assim, deixaremos de fazer menção à base quanto no momento de apresentar as coordenadas de qualquer vetor.*

É muito comum na literatura usar $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ *para denotar uma base ortogonal.*

Definição 5. *Sejam* $\vec{u} = (a, b, c)$ *e* $\vec{v} = (x, y, z)$*. O número "* $ax + by + cz$ *" – denotado* $\vec{u} \bullet \vec{v}$ *– será o* ***produto escalar (ou produto interno) de*** $\vec{u}$ ***por*** $\vec{v}$*.*

Corolário 3. *Nas mesmas condições da definição,* $\vec{u} \perp \vec{v}$ *se, e somente se,* $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$*.*

Demonstração. A mesma usada para vetores paralelos a um plano. □

Exercício 15. *Determine* x *de modo que* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *sejam ortogonais.*

(1) $\vec{u} = (x, 0, 3)$ *e* $\vec{v} = (1, x, 3)$
(2) $\vec{u} = (x, x, 4)$ *e* $\vec{v} = (4, x, 1)$
(3) $\vec{u} = (x + 1, 1, 2)$ *e* $\vec{v} = (x - 1, -1, -2)$
(4) $\vec{u} = (x, -1, 4)$ *e* $\vec{v} = (x, -3, 1)$

Exercício 16. *Determine* $\vec{u}$ *ortogonal a* $(-3, 0, 1)$ *tal que* $\vec{u} \bullet (1, 4, 5) = 24$ *e* $\vec{u} \bullet (-1, 1, 0) = 1$*.*

Exercício 17. *Obtenha* $\vec{u}$ *ortogonal a* $(1, 1, 0)$ *tal que* $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ *e* $\operatorname{ang}\big(\vec{u}, (1, -1, 0)\big) = \frac{\pi}{4}$*.*

Proposição 8. *Para* $\vec{u}$*,* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$*, vetores, e* $\alpha \in \mathbb{R}$*,*

(1) $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$*,*
(2) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w}$*,*
(3) $(\alpha \vec{u}) \bullet \vec{v} = \alpha(\vec{u} \bullet \vec{v})$*,*
(4) $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$*,*
(5) $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0$ *se, e somente se* $\vec{u} = \vec{0}$*; e*
(6) se $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$*, então* $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\big(\operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{v})\big)$*.*

Demonstração. Mesmos argumentos feitos para $\mathbb{V}^2$. □

Corolário 4 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Se* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *são vetores,* $|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$*. E vale a igualdade se, e somente se,* $\vec{u} /\!/ \vec{v}$*.*

Demonstração. Mesmos argumentos feitos para $\mathbb{V}^2$. □

Exercício 18. *Sejam* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$*, vetores. Mostre que:*

(1) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,(\vec{u} \bullet \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$*.* *(2)* $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$*.*

Corolário 5 (Desigualdade Triangular)**.** *Se* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *são vetores, então* $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$*.*

Demonstração. Mesmos argumentos feitos para $\mathbb{V}^2$. □

Exercício 19. *Mostre que, para* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$*, vetores,* $\big|\, \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \,\big| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$*.*

Exercício 20. *Sejam* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$*, vetores ambos não nulos. Mostre que são equivalentes:*

(1) $\vec{u} /\!/ \vec{v}$ *e têm mesmo sentido,* *(2)* $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ *e* *(3)* $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \big|\, \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \,\big|$

Apresente equivalências análogas a estas para o fato de $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *serem paralelos de sentidos contrátrios.*

Exercício 21. *Para* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$*, vetores, mostre as seguintes identidades*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\,\|\vec{u}\|^2 + 2\,\|\vec{v}\|^2 \qquad e \qquad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4(\vec{u} \bullet \vec{v}).$$

Exercício 22. *Sendo* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *unitários,* $\|w\| = 4$*,* $\vec{u} \bullet \vec{w} = -2$*,* $\vec{v} \bullet \vec{w} = -4$ *e* $\operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$*, calcule:*

(1) $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \bullet \vec{u}$
(2) $(5\vec{u} - \vec{w}) \bullet (\vec{w} - 2\vec{u})$
(3) $(2\vec{w} - \vec{v} + \vec{u}) \bullet (-\vec{u} + 2\vec{w} + \vec{v})$
(4) $(\vec{w} - \vec{v} + \vec{u}) \bullet (-\vec{u} + 2\vec{w} + \vec{v})$

Definição 6. *Seja* $\vec{v} \neq \vec{0}$*. Dado o vetor* $\vec{u}$*,* ***a projeção ortogonal de*** $\vec{u}$ ***sobre*** $\vec{v}$ *é o vetor* $\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right) \vec{v}$*, que será denotado por* $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$*.*

Proposição 9. *Sejam* $\vec{v}$*,* $\vec{u}$ *e* $\vec{w}$*, vetores, e* $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$*. Suponhamos que* $\vec{v} \neq \vec{0}$*. Então:*

(1) $\big(\vec{u} - \operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}\big) \perp \vec{v}$*,*
(2) $\operatorname{proj}_{\vec{v}} (\alpha \vec{u}) = \alpha \operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$*,*
(3) $\operatorname{proj}_{\vec{v}} (\vec{u} + \vec{w}) = \operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} + \operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$*,*

(4) se $\mu \neq 0$, então $\text{proj}_{(\mu\vec{v})}\vec{u} = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$,
(5) $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{0}$ *se, e somente se,* $\vec{u} \perp \vec{v}$, *e*
(6) $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{u}$ *se, e somente se,* $\vec{u} // \vec{v}$.

Demonstração. Mesmos argumentos feitos para $\mathbb{V}^2$. □

Exercício 23. *Dada a base ortonormal* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, *sejam* $\vec{u} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ *e* $\vec{v} = 3\vec{\imath} - 6\vec{\jmath}$.
(1) Obtenha a projeção ortogonal de $\vec{v}$ *sobre* $\vec{u}$.
(2) Determine $\vec{p}$ *e* $\vec{q}$ *tais que* $\vec{v} = \vec{p} + \vec{q}$, *sendo* $\vec{p}$ *paralelo a* $\vec{u}$ *e* $\vec{q}$ *ortogonal a* $\vec{u}$.

Exercício 24. *Calcule a projeção ortogonal de* $\vec{v}$ *sobre* $\vec{u}$ *em cada caso.*
(1) $\vec{v} = (1, -1, 2)$ *e* $\vec{u} = (3, -1, 1)$
(2) $\vec{v} = (1, 3, 5)$ *e* $\vec{u} = (-3, 1, 0)$
(3) $\vec{v} = (-1, 1, 1)$ *e* $\vec{u} = (-2, 1, 2)$
(4) $\vec{v} = (1, 2, 4)$ *e* $\vec{u} = (-2, -4, -8)$

2. Produtos Misto e Vetorial

Definição 7. *Dados* $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (x, y, z)$ *e* $\vec{w} = (p, q, r)$, *vetores.* ***O produto misto de*** $\vec{u}, \vec{v}$ ***e*** $\vec{w}$ ***(nesta ordem)*** *é o número*

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} .$$

A ordem é dos vetores "dentro" dos colchetes é importante pois

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] .$$

Observamos que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são coplanares se, e somente se, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.

Definição 8. *Dados* $\vec{u} = (a, b, c)$ *e* $\vec{v} = (x, y, z)$, *vetores.* ***O produto vetorial de*** $\vec{u}$ ***por*** $\vec{v}$ *é o vetor*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ z & x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} \right) .$$

Se $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ *é a base (ortonormal), costuma-se abusar da linguagem de determinantes e escrever:*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} .$$

Imediatamente observamos que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, $\vec{u} // \vec{v}$.

Exercício 25. *Determine:*
(1) $(1, 2, 3) \wedge (3, 1, 2)$
(2) $(1, 2, 3) \wedge (2, 4, 6)$
(3) $(3, 1, 2) \wedge (2, 4, 6)$
(4) $(-1, 1, 2) \wedge (-1, 1, 2)$
(5) $(0, 4, 2) \wedge (1, 3, 2)$
(6) $(1, 2, 5) \wedge (2, 0, -1)$
(7) $(6, -2, -4) \wedge (-1, -2, 1)$
(8) $(7, 0, -5) \wedge (1, 2, -1)$
(9) $(1, -3, 1) \wedge (1, 1, 4)$

Exercício 26. *Seja* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ *uma base ortonormal de* $\mathbb{V}^3$. *Calcule:*
(1) $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}$ *(2)* $\vec{\jmath} \wedge \vec{k}$ *(3)* $\vec{k} \wedge \vec{\imath}$ *(4)* $\vec{\imath} \wedge \vec{k}$ *(5)* $\vec{k} \wedge \vec{\jmath}$ *(6)* $\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath}$

Exercício 27. *Calcule* $\left(\sqrt{2}\vec{\imath} - \sqrt{3}\vec{\jmath} + \vec{k}\right) \wedge \left(-\sqrt{6}\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \sqrt{3}\vec{k}\right)$.

A próxima proposição vai justificar o nome "misto" ao "produto dos colchetes".

Proposição 10. *Se* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *são vetores, então* $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \bullet \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \bullet \vec{w}$.

Demonstração. Sejam $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (x, y, z)$ e $\vec{w} = (p, q, r)$. Desenvolvendo o determinante $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ pelos cofatores da sua primeira linha,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = a(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} y & z \\ q & r \end{vmatrix} + b(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} x & z \\ p & r \end{vmatrix} + c(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ p & q \end{vmatrix} =$$
$$= (a, b, c) \bullet \left(\begin{vmatrix} y & z \\ q & r \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & x \\ r & p \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ p & q \end{vmatrix} \right) = \vec{u} \bullet \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) .$$

Desenvolvendo o mesmo determinante pelos cofatores da terceira linha obtemos que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{w}$. □

Corolário 6. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores. Então $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}]$. Ainda, $\vec{u} \perp (\vec{u} \wedge \vec{v})$ e $\vec{v} \perp (\vec{u} \perp \vec{v})$.*

Demonstração. Uma vez que

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v}) = [\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}] \ ,$$

pela proposição anterior.

Ainda, $\vec{u} \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v}) = [\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}] = 0 = [\vec{v}, \vec{u}, \vec{v}] = \vec{v} \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v})$. Sendo assim, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. □

Proposição 11. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, vetores, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:*

(1) $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$
(2) $(\vec{u} + \vec{w}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{w} \wedge \vec{v}$
(3) $(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v})$
(4) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

Exercício 28. *Demonstre a proposição anterior.*

Exercício 29. *Para $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, mostre que* $(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \wedge (\gamma \vec{u} + \delta \vec{v}) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Proposição 12. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}$, vetores, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:*

(1) $[\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \lambda[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \lambda \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w}]$
(2) $[\vec{u} + \vec{t}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{t}, \vec{v}, \vec{w}]$
(3) $[\vec{u}, \vec{v} + \vec{t}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{t}, \vec{w}]$
(4) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{t}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}]$

Exercício 30. *Demonstre a proposição anterior.*

Exercício 31. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não paralelos. Seja $\vec{x}$ um vetor qualquer. Mostre que* $\text{proj}_{\vec{u} \wedge \vec{v}} \vec{x} = \frac{[\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}]}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$. *Suponha que $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ e $\vec{t} = \gamma \vec{u} + \delta \vec{v}$ são também não paralelos. Mostre que* $\text{proj}_{\vec{u} \wedge \vec{v}} \vec{x} = \text{proj}_{\vec{w} \wedge \vec{t}} \vec{x}$.

Teorema 13. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores **não paralelos**. Então $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é base para $\mathbb{V}^3$ e, para $\vec{w} \in \mathbb{V}^3$,*

$$\vec{w} /\!/ (\vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ se, e somente se, } \vec{w} \perp \vec{u} \text{ e } \vec{w} \perp \vec{v}.$$

Demonstração. Dado que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é não nulo, conclui-se que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é base pelo corolário 6. Tomemos $\vec{w} \in \mathbb{V}^3$.

Suponhamos que $\vec{w}$ é paralelo a $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Dado que $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{w} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$. Como $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{u} = 0$, então $\vec{w} \bullet \vec{u} = 0$ e consequentemente $\vec{w} \perp \vec{u}$. Analogamente, $\vec{w} \perp \vec{v}$.

Agora suponhamos que $\vec{w} \perp \vec{u}$ e $\vec{w} \perp \vec{v}$. Dado que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é base, existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma(\vec{u} \wedge \vec{v})$. Como $\vec{w} \perp \vec{u}$,

$$0 = \vec{w} \bullet \vec{u} = \big(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma(\vec{u} \wedge \vec{v})\big) \bullet \vec{u} = \alpha \|\vec{u}\|^2 + \beta(\vec{v} \bullet \vec{u}) \ .$$

Analogamente,

$$0 = \vec{w} \bullet \vec{v} = \big(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma(\vec{u} \wedge \vec{v})\big) \bullet \vec{v} = \alpha(\vec{u} \bullet \vec{v}) + \beta \|\vec{v}\|^2 \ .$$

Logo os números α e β resolvem o sistema linear

$$\begin{pmatrix} \|\vec{u}\|^2 & \vec{u} \bullet \vec{v} \\ \vec{u} \bullet \vec{v} & \|\vec{v}\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Mas a matriz $\begin{pmatrix} \|\vec{u}\|^2 & \vec{u} \bullet \vec{v} \\ \vec{u} \bullet \vec{v} & \|\vec{v}\|^2 \end{pmatrix}$ tem determinante $\|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2 > 0$, pela **Desigualdade de Cauchy-Schwarz** e dado que $\vec{u} \not/\!/ \vec{v}$. Portanto $\alpha = \beta = 0$ e $\vec{w} /\!/ (\vec{u} \wedge \vec{v})$. □

Corolário 7. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores ambos não nulos e tais que $\vec{u} \perp \vec{v}$. Para $\vec{w} \in \mathbb{V}^3$,*

$$\vec{w} \perp \vec{u} \text{ se, e somente se, existem } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tais que } \vec{w} = \alpha \vec{v} + \beta(\vec{u} \wedge \vec{v}).$$

Exercício 32. *Demonstre o corolário anterior.*

Proposição 14. *Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$, então $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{w})\vec{u}$.*

Demonstração. Sejam $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (x, y, z)$ e $\vec{w} = (p, q, r)$. Logo

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c & a \\ z & x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} \\ p & q & r \end{vmatrix} .$$

A coordenada de $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ na direção $\vec{\imath}$ é

$$r \begin{vmatrix} c & a \\ z & x \end{vmatrix} - q \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} rc & a \\ rz & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} qb & a \\ qy & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} pa & a \\ px & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u} \bullet \vec{w} & a \\ \vec{v} \bullet \vec{w} & x \end{vmatrix} .$$

Analogamente concluímos que a coordenada de $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ na direção $\vec{\jmath}$ é $\begin{vmatrix} \vec{u} \bullet \vec{w} & b \\ \vec{v} \bullet \vec{w} & y \end{vmatrix}$; enquanto na direção $\vec{k}$ é $\begin{vmatrix} \vec{u} \bullet \vec{w} & c \\ \vec{v} \bullet \vec{w} & z \end{vmatrix}$. Portanto

$$\begin{aligned} (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge w &= \Big((\vec{u} \bullet \vec{w})x - (\vec{v} \bullet \vec{w})a, (\vec{u} \bullet \vec{w})y - (\vec{v} \bullet \vec{w})b, (\vec{u} \bullet \vec{w})z - (\vec{v} \bullet \vec{w})c\Big) = \\ &= \Big((\vec{u} \bullet \vec{w})x, (\vec{u} \bullet \vec{w})y, (\vec{u} \bullet \vec{w})z\Big) - \Big((\vec{v} \bullet \vec{w})a, (\vec{v} \bullet \vec{w})b, (\vec{v} \bullet \vec{w})c\Big) = \\ &= (\vec{u} \bullet \vec{w})\big(x, y, z\big) - (\vec{v} \bullet \vec{w})\big(a, b, c\big) = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{w})\vec{u} . \end{aligned}$$

□

Exercício 33. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, vetores. Mostre que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -(\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{w} + (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v}$.*

Exercício 34. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{t}$, vetores. Mostre que $\big(\vec{u} \wedge \vec{v}\big) \bullet \big(\vec{w} \wedge \vec{t}\big) = \begin{vmatrix} \vec{u} \bullet \vec{w} & \vec{u} \bullet \vec{t} \\ \vec{v} \bullet \vec{w} & \vec{v} \bullet \vec{t} \end{vmatrix}$.*

Teorema 15. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores. Então $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + \big(\vec{u} \bullet \vec{v}\big)^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2$.*

Demonstração. Pelo exercício anterior,

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{u} \bullet \vec{u} & \vec{u} \bullet \vec{v} \\ \vec{v} \bullet \vec{u} & \vec{v} \bullet \vec{v} \end{vmatrix} = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2 .$$

□

Exercício 35. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos. Mostre que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \operatorname{sen}\big(\operatorname{ang}(\vec{u}, \vec{v})\big)$.*

Exercício 36. *Mostre que, para $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$, $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. Mostre que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ se, e somente se, $\vec{u} \perp \vec{v}$.*

Exercício 37. *Mostre que a área do triângulo $\triangle ABC$ é $\frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2}$.*

Exercício 38. *A medida angular entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é $\frac{\pi}{3}$, e suas normas são, respectivamente, 1 e 2. Sendo $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$, calcule a norma de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.*

Exercício 39. *O lado do quadrado $ABCD$ mede 2, AC é diagonal e M é ponto médio de BC. Calcule $\|\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DB}\|$.*

Exercício 40. *Os pontos A, B e C formam um triângulo, e P e Q são tais que $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC}$ e $3\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$. Mostre que B, P e Q formam triângulo e calcule a razão entre as áreas de $\triangle BPQ$ e $\triangle ABC$.*

Exercício 41. *Resolva os sistemas:*

(1) $\begin{cases} \vec{x} \wedge (\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} \\ \vec{x} \bullet (\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = 2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \vec{x} \bullet \Big(2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}\Big) = 9 \\ \vec{x} \wedge \Big(-\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}\Big) = -2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \end{cases}$

Exercício 42. *Determine $\vec{x}$ de norma $\sqrt{3}$, ortogonal a $(1, 1, 0)$ e a $(-1, 0, 1)$ e que forma ângulo agudo com $\vec{\jmath}$.*

Exercício 43. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, vetores.*
(1) Mostre que $\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right| \leq \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|$.
(2) Mostre que $\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|$ se, e somente se, $\vec{0} \in \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ ou $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é base ortogonal.

Exercício 44. *Para $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, vetores, $a,b,c,x,y,z \in \mathbb{R}$, mostre que*

$$(a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w})\wedge(x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}) = \begin{vmatrix} b & y \\ c & z \end{vmatrix}(\vec{v}\wedge\vec{w}) - \begin{vmatrix} a & x \\ c & z \end{vmatrix}(\vec{w}\wedge\vec{u}) + \begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix}(\vec{u}\wedge\vec{v}) \ .$$

Exercício 45. *Para $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{V}^3$ e $a,b,c,x,y,z,p,q,r \in \mathbb{R}$, mostre que*

$$\Big[a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}\ ,\ x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}\ ,\ p\vec{u}+q\vec{v}+r\vec{w}\Big] = \begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix}\cdot[\vec{u},\vec{v},\vec{w}].$$

Exercício 46. *Prove que $[\vec{u}+\vec{v},\vec{v}+\vec{w},\vec{w}+\vec{u}] = 2[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.*

Exercício 47. *Sendo $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 6$, calcule $[2\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w},-\vec{u}+\vec{v}-\vec{w},\vec{v}-3\vec{w}]$.*

Proposição 16. *O volume do tetraedro $ABCD$ é $\frac{\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]\right|}{6}$.*

Demonstração. Tomemos como base do tetraedro o triângulo $\triangle ABC$. Sendo assim, o vértice D vai determinar a altura do tetraedro. Seja $\vec{n} = \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

Pelo exercício 37, a área do triângulo $\triangle ABC$ é $S_{\triangle ABC} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\|\vec{n}\|}{2}$.

Uma vez que $\vec{n}$ é ortogonal à base do tetraedro, concluímos que sua altura h é o tamanho da projeção de $\overrightarrow{AD}$ sobre $\vec{n}$, ou seja, $h = \|\text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{AD}\| = \left|\frac{\overrightarrow{AD}\bullet\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right|$.

Portanto o volume do tetraedro é

$$\frac{S_{\triangle ABC}\cdot h}{3} = \frac{\frac{\|\vec{n}\|}{2}\cdot\left|\frac{\overrightarrow{AD}\bullet\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right|}{3} = \left|\frac{\overrightarrow{AD}\bullet(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})}{6}\right| = \frac{\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]\right|}{6} \ .$$

□

Exercício 48. *Sejam $ABCD$ um tetraedro, $P = A + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, $Q = B - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ e $R = C + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Mostre que $PQRD$ forma tetredro e determine a razão entre os volumes de $PQRD$ e $ABCD$.*